

20/3/17

Την προηγούμενη φορά είπαμε:

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$. Το εξωτερικό τους γινόμενο $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι ένα διάνυσμα που:

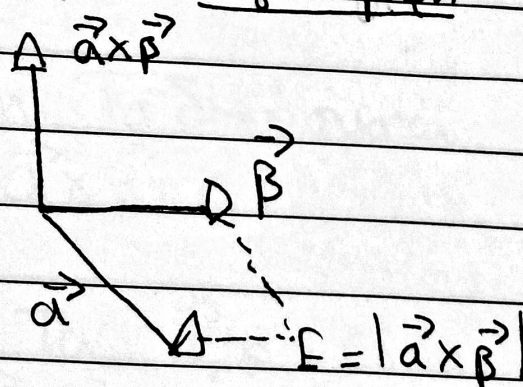
i) είναι το μηδενικό αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$

ii) $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{b} \neq \vec{0}$, τότε έχει

α) μήκος $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$

β) διεύθυνση $\vec{a} \times \vec{b}$ είναι ορθογώνια προς τα $\vec{a}, \vec{b}$

γ) φορά. Αν $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ είναι βάση τότε είναι δεξιόστροφη



Παρατήρηση: Είναι ορθογώνια όταν:

i) $\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = 0 = \langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle$

ii) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$

iii) Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι Γ.Ε
 $\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

Πρόταση: (Για ορθοκανονικά, δεξιόστροφα)

Έστω $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$

Αν $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = (a_1, a_2, a_3)$ ορθοκανονικά δεξιόστροφα βάση.

$\vec{\beta} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ παρά ως προς κάποια βάση τα γινόμενα

τότε

$$\vec{a} \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

Απόδειξη: $\vec{a} \times \vec{\beta} = (x_1, x_2, x_3) \begin{cases} -a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \quad (\cdot \beta_3) \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = 0 \quad (-a_2) \end{cases}$

$$\begin{cases} (a_1 \beta_3 - a_3 \beta_1) x_1 + (a_2 \beta_3 - a_3 \beta_2) x_2 = 0 \\ (a_2 \beta_1 - a_1 \beta_2) x_2 + (a_3 \beta_1 - a_1 \beta_3) x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{και μετα} \\ \text{πολλ με} \\ \cdot \beta_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(a_1 \beta_3 - a_3 \beta_1) x_1 = (a_2 \beta_3 - a_3 \beta_2) x_2 \\ -(a_2 \beta_1 - a_1 \beta_2) x_2 = (a_3 \beta_1 - a_1 \beta_3) x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{και προσθε} \\ \cdot (-a_1) \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{a_2 \beta_3 - a_3 \beta_2} = \frac{x_2}{-(a_1 \beta_3 - a_3 \beta_1)} = \frac{x_3}{a_2 \beta_1 - a_1 \beta_2} = k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = k(a_2 \beta_3 - a_3 \beta_2) \\ x_2 = k(a_3 \beta_1 - a_1 \beta_3) \\ x_3 = k(a_2 \beta_1 - a_1 \beta_2) \end{cases}$$

Εύρεση του k

$$\rightarrow |\vec{a} \times \vec{\beta}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$

$$|\vec{a} \times \vec{\beta}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{\beta}|^2 \sin^2(\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{\beta}})$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{\beta}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{\beta}|^2 (1 - \cos^2(\hat{\vec{a}}, \hat{\vec{\beta}})) \Leftrightarrow$$

$$|\vec{a} \times \vec{\beta}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{\beta}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle^2$$

$$|\vec{a} \times \vec{\beta}|^2 = k^2 \{ \alpha_2^2 \beta_3^2 + \alpha_3^2 \beta_2^2 - 2\alpha_2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3 + \alpha_3^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_3^2 - 2\alpha_1 \alpha_3 \beta_1 \beta_3 + \alpha_2^2 \beta_1^2 + \alpha_1^2 \beta_2^2 - 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \}$$

$$= k^2 \{ \alpha_1^2 (|\vec{\beta}|^2 - \beta_1^2) + \alpha_2^2 (|\vec{\beta}|^2 - \beta_2^2) + \alpha_3^2 (|\vec{\beta}|^2 - \beta_3^2) - 2\alpha_2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3 - 2\alpha_1 \alpha_3 \beta_1 \beta_3 - 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \} =$$

$$= k^2 \{ |\vec{a}|^2 |\vec{\beta}|^2 - (\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_2^2 + \alpha_3^2 \beta_3^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 + 2\alpha_1 \alpha_3 \beta_1 \beta_3 + 2\alpha_2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3) \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{\beta}|^2 = k^2 \{ |\vec{a}|^2 |\vec{\beta}|^2 - (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3)^2 \} =$$

$$= k^2 \{ |\vec{a}|^2 |\vec{\beta}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle^2 \}$$

Αρα από (1), (2) έχω $k = \pm 1$

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3, \quad \vec{\beta} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$$

$\vec{a} \times \vec{\beta} =$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
	α_1	α_2	α_3
	β_1	β_2	β_3

Ιδιότητες των $\epsilon\}$ γινόμενων

$$i) (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{\beta} = \vec{a}_1 \times \vec{\beta} + \vec{a}_2 \times \vec{\beta}$$

$$(c\vec{a}) \times \vec{\beta} = c(\vec{a} \times \vec{\beta})$$

$$\vec{a} \times (\vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2) = \vec{a} \times \vec{\beta}_1 + \vec{a} \times \vec{\beta}_2,$$

$$\vec{a} \times (\mu\vec{\beta}) = \mu(\vec{a} \times \vec{\beta})$$

$$ii) \vec{a} \times \vec{\beta} = -\vec{\beta} \times \vec{a}$$

$$iii) \vec{a} \times \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{a_1}{\beta_1} = \frac{a_2}{\beta_2} = \frac{a_3}{\beta_3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = p\beta_1 \\ a_2 = p\beta_2 \\ a_3 = p\beta_3 \end{cases}$$

$$\text{Π.χ } \vec{a} = (1, 2, 3) \text{ είναι Γ.Ε ; } |\vec{a}|$$
$$\vec{\beta} = (0, 1, 2) \text{ γιατί } \frac{1}{0} = \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$$

δεν είναι
επίδοι έχω
άρα είναι Γ.Α.

$$\vec{a}_1 = (a_1, a_2, a_3)$$

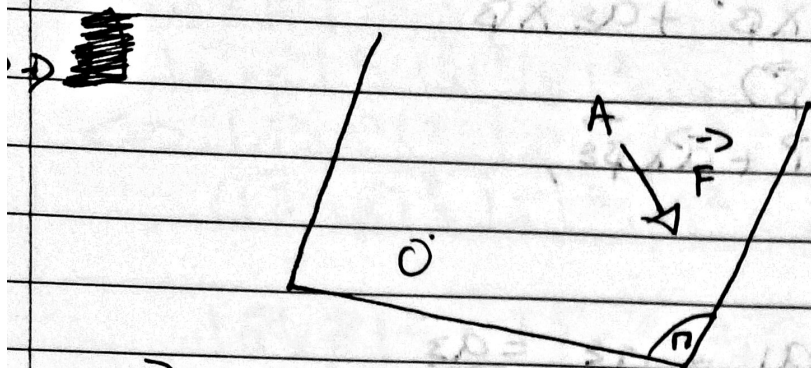
$$\vec{a}_2 = (a_1', a_2', a_3')$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (a_1 + a_1', a_2 + a_2', a_3 + a_3')$$

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 + a_1' & a_2 + a_2' & a_3 + a_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Εφαρμογές $\epsilon\{\cdot\}$ διανυσμάτων



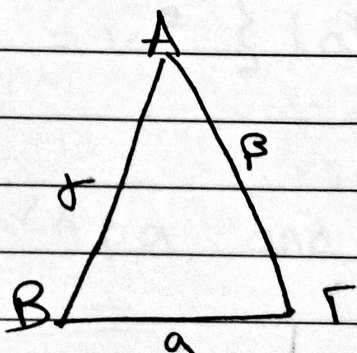
$$\vec{M} \perp (F)$$

$|\vec{M}| = |\vec{F}|$ απόσταση του O από την ευθεία της F
 $\vec{M} = OA \times F$

$$(1) |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \geq 0 \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \Rightarrow |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$(1) \Leftrightarrow (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

1) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$



$$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma A} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma A}) \times \vec{\Gamma A} = \vec{0} \times \vec{\Gamma A} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} \times \vec{\Gamma A} + \vec{B\Gamma} \times \vec{\Gamma A} + \vec{\Gamma A} \times \vec{\Gamma A} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} \times \vec{\Gamma A} + \vec{B\Gamma} \times \vec{\Gamma A} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\vec{AB} \times \vec{A\Gamma} + \vec{B\Gamma} \times \vec{\Gamma A} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{AB} \times \vec{A\Gamma} = \vec{B\Gamma} \times \vec{\Gamma A}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{AB} \times \vec{A\Gamma}| = |\vec{B\Gamma} \times \vec{\Gamma A}|$$

$$\Leftrightarrow |\vec{AB}| |\vec{A\Gamma}| \sin \hat{A} = |\vec{B\Gamma}| |\vec{\Gamma A}| \sin \hat{\Gamma} \Leftrightarrow$$

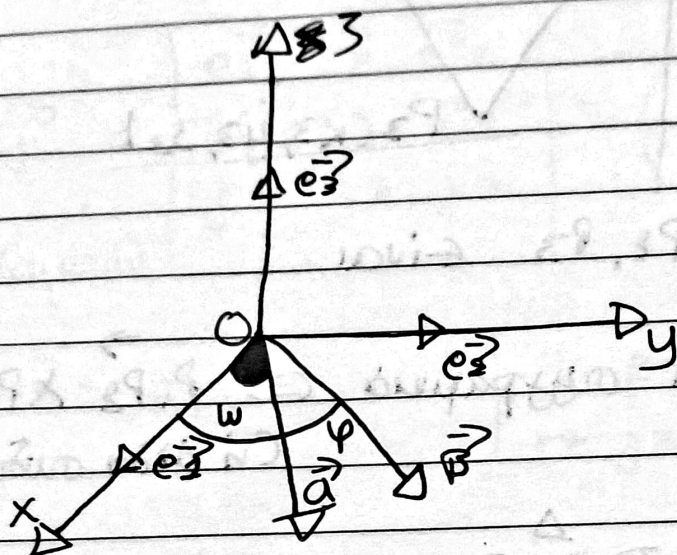
$$\Leftrightarrow \gamma \cdot \beta \sin \hat{A} = \alpha \cdot \beta \sin \hat{\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma \sin \hat{A} = \alpha \sin \hat{\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{\Gamma}}{\gamma}$$

νόμος ημίτων.

2)



$$\vec{a} = (\cos w, \sin w, 0) = (\cos w)\vec{e}_1 + (\sin w)\vec{e}_3$$

$$\vec{b} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) = (\cos \varphi)\vec{e}_2 + (\sin \varphi)\vec{e}_3$$

$$|\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \cos w & \sin \varphi & 0 \\ \sin w & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

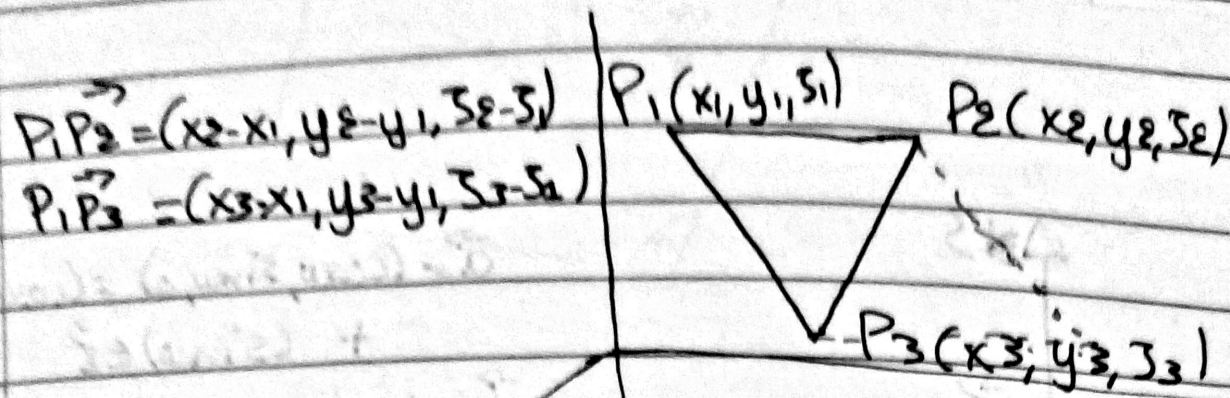
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \cos w & \sin w \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} \vec{e}_3 = (\cos w \sin \varphi - \cos \varphi \sin w) \vec{e}_3 = (0, 0, \cos w \sin \varphi - \cos \varphi \sin w)$$

Με τον ορισμό: $\vec{a} \times \vec{b} \parallel \vec{e}_3$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \sin(\varphi - w)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}| \vec{e}_3 = \sin(\varphi - w) \vec{e}_3$$

$$\sin(\varphi - w) = \cos w \sin \varphi - \cos \varphi \sin w$$

3) Δίνεται τα σημεία $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, 3$
 τότε είναι συνευθειακά;
 (και τότε τρία σημεία είναι συνευθειακά)



Τα σημεία P_1, P_2, P_3 είναι

συνευθειακά $\Leftrightarrow$

$\vec{P_1P_2}, \vec{P_1P_3}$ είναι συγγραμμά $\Leftrightarrow \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = \vec{0}$
 (ή άλλοι συνδυασμοί)

Εστω το τρίγωνο $\triangle P_1P_2P_3$ με κορυφές
 $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=1, 2, 3$

Να υπολογιστεί το εμβαδό του $\triangle P_1P_2P_3$
 (θα το δίνουμε)

Εμβαδό $\triangle P_1P_2P_3 = \frac{1}{2} |\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}|$

$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
 $\vec{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$

Μεικτό γινόμενο

Μεικτό Γινόμενο

Ορισμός: Κάθε μέτριο $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ και $\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ του $\mathbb{R}^3$ ορίζεται το μεικτό γινόμενο τους ως
 $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$ (είναι μεικτό γιατί

ορίζεται με ε_{ijk} και δ_{ijk})

Υπολογισμός μείνται γνωμένα

Θεωρώ ορθομοναδιαία δεξιοστροφή βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{\beta} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \gamma_2 \vec{e}_2 + \gamma_3 \vec{e}_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

$$\vec{\beta} \times \vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\Rightarrow [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = a_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

ή

$$[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Θεώρημα: Τα διανύσματα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\text{και } \vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

(ως προς ορθομοναδιαία δεξιοστροφή βάση $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$)

είναι γραμμικώς εξαρτημένα Γ.Ε αν-ν $[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = 0$

Απόδειξη:

$$\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \text{ είναι Γ.Ε} \Leftrightarrow \exists x, y, z \in \mathbb{R} \text{ ώστε } \begin{cases} x\vec{a} + y\vec{\beta} + z\vec{\gamma} = \vec{0} \quad (1) \\ \text{και} \\ |x| + |y| + |z| > 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x(a_1, a_2, a_3) + y(\beta_1, \beta_2, \beta_3) + z(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_1x + \beta_1y + \gamma_1z, a_2x + \beta_2y + \gamma_2z, a_3x + \beta_3y + \gamma_3z) = (0, 0, 0)$$

$$(s) \begin{cases} a_1x + \beta_1y + \gamma_1z = 0 \\ a_2x + \beta_2y + \gamma_2z = 0 \\ a_3x + \beta_3y + \gamma_3z = 0 \end{cases}$$

(s) έχει μη μηδενικές λύσεις $\Leftrightarrow$

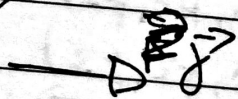
$$\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ a_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

οριζ. αντιστροφή

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

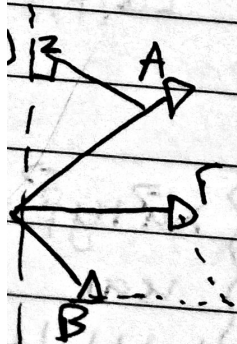
Πρόταση: Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι
Γ.Α $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] \neq 0$

Γεωμετρική Ερμηνεία



Έστω τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$
και $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{\beta}, \vec{OG} = \vec{\gamma}$
 $[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = \langle \vec{a}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma} \rangle =$

$$\begin{aligned} &= |\vec{a}| |\vec{\beta} \times \vec{\gamma}| \cos(\vec{a}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \\ &= |\vec{a}| |\vec{\beta}| |\vec{\gamma}| \sin(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) \cos(\vec{a}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \\ &= E \cdot |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \\ &= E |\vec{a}| \cos(\vec{OA}, \vec{OD}) \end{aligned}$$



* Συμπέρασμα:
Γεωμετρική Ερμηνεία: $|\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}|$ = όγκος
παράλληλεπιδόμου με ακμές
τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$.

Ιδιότητες μεικτών γινομένων

i) $[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = -[\vec{\beta}, \vec{a}, \vec{\gamma}] = -[\vec{a}, \vec{\gamma}, \vec{\beta}]$
(από ιδιότητα αλλαγής γραμμών)

ii) $[\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = [\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{a}] = [\vec{\gamma}, \vec{a}, \vec{\beta}]$

iii) $[\vec{a} + \vec{a}', \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] + [\vec{a}', \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$

iv) $[\lambda \vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}] = \lambda [\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$

v) $[\vec{a}, \vec{a}, \vec{\beta}] = 0 = [\vec{\beta}, \vec{a}, \vec{a}]$

(ορίζουσα θα έχει δύο γραμμές ίσες ή ίδιες)

Παράδειγμα

πρώτη

$$\vec{a} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) \neq (\vec{a} \times \vec{\beta}) \times \vec{\gamma}$$

$\nwarrow$ $\nwarrow$

Λάθος δεν ισχύει